الاحتمالات

١

مقدمـــة

- ✓ يمكن تعريف الاحتمال بأنه التكرار النسبي، حيث أنه يقوم على المشاهدات والبيانات التي يجمعها المرء من المحاولات المتكررة (بشكل لانهائي) للتجربة تحت الدراسة، أي أنه مبني على فكرة التكرار.
- ✓ مثال: إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي الى الحادث A تساوي n(A)

فإن التكرارالنسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$

إذا كبرت n بلا حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية الى عدد ثابت وليكن P فإننا نقول أن احتمال الحادث A هو P

٢

مقدمــــة

✓مثال: عند دراسة معدل نزول الأمطار طيلة ٢٠ سنة، فوجدنا أنه في ٧ سنوات زادت عن ٤٠٠ ملم، وفي ٣ سنوات زادت عن ٤٥٠ ملم، أوجد ما يلي:

أ- احتمال أن تكون كميات الأمطار للعام القادم أكثر من ٤٠٠ ملم؟

$$= \frac{7}{20} = 0.35$$

ب- احتمال أن تكون في العام القادم أكبر من ٤٥٠ ملم؟

$$= \frac{3}{20} = 0.15$$

٣

مقدمــــة

✓مثال: إذا كان طلبة كلية العلوم الادارية والمالية موزعين على النحو الاتي:

التخصص	عدد الطلاب
إدارة الاعمال	٣٥٠
المحاسبة	٤٥٠
إدارة المستشفيات	٢٠٠

أوجد ما يلي:

أ- التكرار النسبي لطلاب المحاسبة ؟

$$= \frac{450}{350+450+200} = 0.45$$

إذاً احتمال أن يكون الطالب من تخصص المحاسبة هو 0.45

٤

المجموعات

المجموعة

تجمع محدد تحديداً تاماً من أي عدد من العناصر أو الأشياء.

رموز

يرمز للمجموعة بالأحرف الكبيرة
A,B, C....
و العناصر بالأحرف الصغيرة
a ,b , c...
الرمز ∈ يعني ينتمي إلى
والرمز ∉ يعني لا ينتمي الى
إذا كان b عنصر في المجموعة A فإن $b \in A$
أما إذا لم يكن bعنصر في A فإن $b \notin A$

طرق وصف المجموعات

طريقة العد

. { }بذكر جميع العناصر بين أقواس مجموعة
$\{1, 2, 3, 4\}$.
$\{H, T\}$
بحيث أن H صورة و T كتابة

طريقة القانون

بذكر خاصية مميزة أو قانون لعناصر المجموعة.
$\{x \mid$ عدد طبيعي أقل من 10 $x\}$.
$\{x \mid$ يوم من أيام الأسبوع $x\}$.

تعريفات

المجموعة الخالية Empty Set: المجموعة التي لا يوجد فيها عناصر مطلقاً و يرمز لها $\{\ \}, \emptyset$.

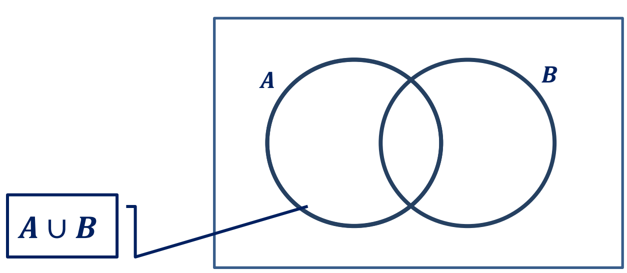
المجموعة الجزئية Subset: نقول أن المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر في A منتمياً إلى B و يرمز له $\subset$ $A \subset B$.

تساوي مجموعتين: نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا كان لهما نفس العناصر يرمز له $A = B$.
و ذلك عندما يكون $B \subset A$ و$A \subset B$

المجموعة الكلية: المجموعة التي تحوي جميع العناصر تحت البحث فتكون جميع المجموعات جزئية منها.

العمليات على المجموعات

الاتحاد Union: اتحاد المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر الموجودة في Aأو في B أو في كليهما معاً
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
$\vee$ تعني أو (or)



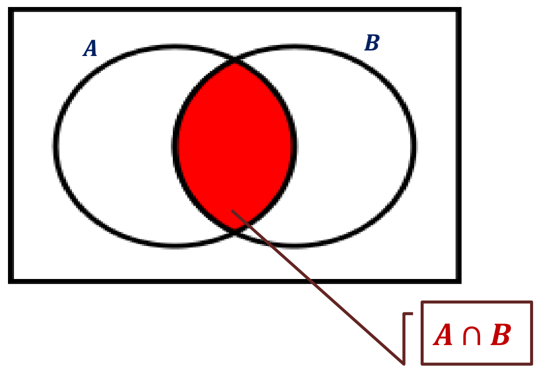
العمليات على المجموعات

التقاطع
Intersection

تقاطع المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر المشتركة بين A و B .

$.A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$\wedge$ تعني و (and)

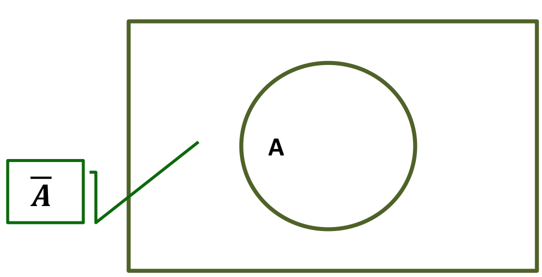


العمليات على المجموعات

المتممة
Complement

إذا كانت S المجموعة الكلية و A مجموعة جزئية منها فإن متممة A $\bar{A}$ هي مجموعة عناصر S الغير موجودة في A.

$.\bar{A} = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$



العمليات على المجموعات

إذا لم يوجد عناصر مشتركة بين مجموعتين أي أن

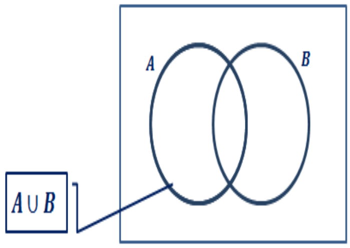
$$A \cap B = \emptyset$$

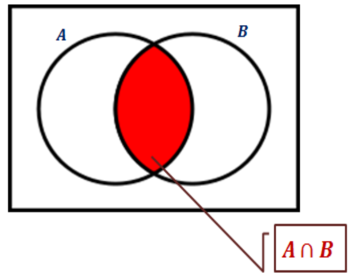
فإننا نقول أن المجموعتين منفصلتين عن بعضهما disjoint

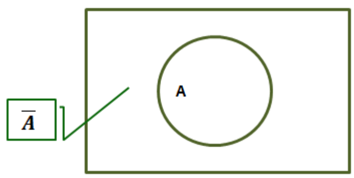
العمليات على المجموعات

يمكننا تمثيل المجموعات والعمليات عليها باستعمال أشكال هندسية وذلك بالتعبير عن المجموعة الكلية بمستطيل أو مربع، وتمثيل أي مجموعة جزئية للمجموعة الهندسية بشكل معين (دائرة أو مثلث أو غيرهما) بحيث يرسم داخل المستطيل وتوضح المعلومات التي تجرى على المجموعات وتسمى هذه الأشكال بأشكال فان (Venn diagram)

أشكال فان Venn diagram

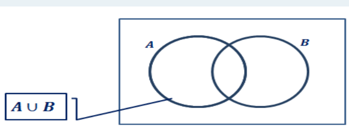


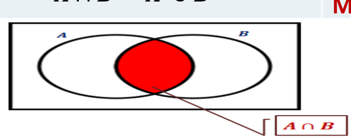




خواص العمليات على المجموعات

الاتحاد	التقاطع	الخاصية
$A \cup B = B \cup A$ خاصية التبديل للاتحاد	$A \cap B = B \cap A$ خاصية التبديل للتقاطع	الابدال
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	التجميع
$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$	$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$	التوزيع
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	ديمورغان De Morgan's ws





الفضاء العيني

التجربة الإحصائية

التجربة التي لا تكون نتيجتها معروفة بشكل حتمي مسبقاً، وتعرف النتيجة بأنها النتيجة البسيطة.
مثال: عند رمي قطعة نقود ، أو رمي حجر نرد ،ما هي النتائج البسيطة الممكنة؟

الفضاء العيني أو فضاء العينة

مجموعة جميع الاحتمالات الممكنة لتجربة إحصائية.
أي عنصر في فضاء العينة يسمى نقطة فيه.
ويعبر عن الفضاء العيني بالرمز Ω

مثال: إرم قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة، ثم اكتب عناصر الفضاء العيني؟
الحل: الاحتمالات الممكنة لقطعة النقود إما صورة H أو كتابة، أما حجر النرد الاحتمالات الممكنة له (1,2,3,4,5,6)
وبناءاً عليه فإن الاحتمالات الممكنة تمثل عناصر الفضاء العيني وهي:

$\Omega = \{(H,1), (H,2), (H,3), \ldots\ldots\ldots, (T,6)\}$

الفضاء العيني

الحادث

هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني (S)، وهو مجموعة مكونة من نتيجة بسيطة واحدة أو أكثر أو لا يحتوي على أي نتيجة.
فإذا احتوى على نتيجة واحدة سمي حادثاً بسيطاً، وإذا احتوى على نتيجتين أو أكثر سمي حادثاً مركباً.

الحادث البسيط
الذي يحوي عنصر واحد فقط

الحادث المركب
يحوي أكثر من عنصر

الحادث المستحيل
الذي لا يحوي أي عنصر

الحادث المؤكد
Sمجموعة فراغ العينة

مثال

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة
اكتب كلا من الأحداث التالية ثم وضح أي من هذه الأحداث يكون حدث :
بسيط – مركب - مؤكد - مستحيل:
أ- حدث A : الحصول على عدد زوجي.
ب – حدث B : الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣.
ج – حدث C: الحصول على عدد اكبر من ٦.
د – حدث D: الحصول على عدد اكبر من أو يساوى ١ وأقل من أو يساوى ٦.

فراغ العينة : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$ حدث مركب
$B = \{3, 6\}$ حدث مركب
$C = \emptyset$ حدث مستحيل
$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ حدث مؤكد

الفضاء العيني

الفضاء العيني المنفصل

يسمى الفضاء العيني محدوداً أو لا نهائياً معدوداً، أي إذا كان محدوداً أو إذا أمكن ربط عناصره واحداً الى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة

مثال:
ارم قطعة نقود حتى تظهر صورة H الى أعلى؟
سوف نقوم برمي القطعة فإن ظهرت الصورة من أول مرة تكون قد انتهت التجربة، وان لم تظهر سنبقى نحاول إلى أن تظهر الصورة حيث يكون الفضاء العيني كالتالي:

$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$

ويمكن ربط جميع عناصر Ω واحداً إلى واحد H مع ١ ، TH مع ٢ ، TTH مع ٣ ، وهكذا حيث أن الأعداد الصحيحة تشير إلى عدد الرميات حتى ظهور اول H

الفضاء العيني

إذا كان Ω الفضاء العيني لتجربة ما، وكان A أي حادث في Ω فإننا نعين لهذا الحادث عدداً P(A) بحيث يحقق الفرضيات التالية:

- احتمال أي حادث يكون كسراً غير سالب، أي أنه عدد حقيقي بين الصفر وبين الواحد الصحيح. $0 \leq P(E) \leq 1$
- احتمال الحادث الأكيد (الفضاء العيني) يساوي واحد.
  $P(\Omega) = 1$
- احتمال اتحاد أي حادثين منفصلين عن بعضهما البعض هو حاصل جمعهما.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$$

قوانين الاحتمال

- إذا رمزنا للحادث الخالي بالحرف فايالاحتمال P ، وكان Ø المعرف على Ω فإن $P(\emptyset) = 0$
- إذا كان احتمال حدوث الحادث A هو $P(A)$ فإن احتمال عدم حدوث A هو $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- إذا كان A, B أي حادثين في الفضاء العيني Ω فإن:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

أمثلة

إذا كان احتمال حصول طالب على قبول من جامعة الملك فيصل هو بعثة يساوي 0.9 فما احتمال عدم حصوله على البعثة؟

$$P(A) = 0.9$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.9 = 0.1$$

إذا كان احتمال وصول طالب الى محاضرته في الوقت المحدد يساوي 0.7 فما احتمال وصول الطالب متأخراً؟

$$P(A) = 0.7$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$$

أمثلة

أذا شب حريق في إحدى العمارات، وكان احتمال وصول الاطفائية الأولى خلال دقيقتين هو 0.9 واحتمال وصول الاطفائية الثانية خلال دقيقتين هو 0.8 واحتمال وصول الاثنتين معاً خلال المدة نفسها يساوي 0.72 فما احتمال وصول الاطفائية الأولى أو الثانية خلال دقيقتين؟

$P(A) = 0.9$ $\quad P(B) = 0.8$ $\quad P(A \cap B) = 0.72$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 + 0.8 - 0.72 = 0.98$$

أمثلة

إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى يساوي 0.20 واحتمال غيابه عن الماحاضرة الثانية يساوي 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرتين الأولى والثانية هو 0.05 :

أ- ما احتمال غياب الطالب عن واحدة من هاتين المحاضرتين على الأقل؟

ب- ما احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟

P(A) = 0.2 P(B) = 0.15 P($A \cap B$) = 0.05

أ- ما احتمال غياب الطالب عن واحدة من هاتين المحاضرتين على الأقل؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.15 - 0.05 = 0.3$$

ب- ما احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟

$$1 - P(A \cup B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

فضاء العينة ذو النقاط المتساوية في إمكانية الحدوث:

إذا كان Ω فضاء العينة لتجربة ما يحتوي n من النقاط المتساوية في إمكانية الحدوث، ويكون كل حادث بسيط منفصلاً عن أي حادث بسيط اخر، ويكون احتمال كل حادث بسيط مساوياً لاحتمال أي حادث اخر، و رمزنا لهذه النقاط 1, 2, 3....n، و كان A حادث من الحوادث يحتوي n(A) من النقاط فإن:

❖ $$P(i) = \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد نقاط الحادث } A}{\text{عدد نقاط فضاء العينة}} = \frac{n(A)}{n}$$

❖ أي أنه إذا احتوى الفضاء العيني على عدد محدود من النقاط متساوية امكانية الحدوث فإن احتمال أي حادث في الفضاء العيني يساوي نسبة عدد النقاط في ذلك الحادث إلى عدد النقاط في الفضاء العيني.

فضاء العينة ذو النقاط المتساوية في إمكانية الحدوث:

مثال: رميت قطعة نقود متزنة وزهرة نرد منتظمة، إذا علمت أن الحادث A يساوي {(H,1),(H,4), t,3)} فما احتمال A ؟

الحل: بما ان قطعة النقود متزنة وزهرة النرد منتظمة يمكننا اعتبار أن نقاط الفضاء العيني متساوية إمكانية الحدوث، وهذه النقاط تمثل النتائج البسيطة وتكون احتمالاتها متساوية

- عدد الاحتمالات = ٢*٦ = ١٢
- احتمال كل نتيجة = $P(i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$
- وبما أن عدد النقاط في الحادث A هو ٣ ، فإن احتمال حدوث الحادث A هو

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

أمثلة

في تجربة رمي حجر نرد مرتين . ما هو احتمال:

١. مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 10.
٢. مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى أكبر من 10.
٣. مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 7.

فراغ العينة يتألف من 36 نقطة.

الوجه الأول / الوجه الثاني	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)

١. إذا كان A ظهور عددين مجموعهما = 10

A= { (4,6) , (6,4) , (5,5) }

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

٢. B حادث ظهور عددين مجموعهما أكبر من 10

B = { (5,6) , (6,5) , (6,6) }

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

٣. C حادث ظهور عددين مجموعهما = 7

C = { (1,6) , (6,1) , (2,5) , (5,2) ,(3,4) , (4,3) }

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

كيس يحتوي ٣ كرات سوداء و ٧ كرات بيضاء ، سحبنا منه كرتين على التوالي و بدون ارجاع.

نرمز لحادث سحب كرة السوداء بالرمز A و سحب كرة البيضاء بالرمز B.

ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء

$$P(B) = \frac{7}{10}$$

إذا كانت الكرة الأولى بيضاء فما احتمال أن تكون الكرة الثانية سوداء

$$P(A \mid B) = \frac{3}{9}$$

ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء و الثانية سوداء

$$P(A \text{ و } B) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

إذن

بما أن احتمال سحب كرة
سوداء كان بشرط كون
الكرة الأولى بيضاء يسمى
هذا الاحتمال

الاحتمال الشرطي

الاحتمال الشرطي

الاحتمال الشرطي للحادث A إذا علم الحادث B هو

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

بشرط أن $0 < P(B)$

أمثلة

في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة.
إذا علمت أن الوجه الظاهر كان عدداً زوجياً فما احتمال الحصول على العدد ٢ ؟

فضاء العينة : S= {1,2,3,4,5,6}
إذا كان الحادث A هو ظهور عدد زوجي ، الحادث B هو ظهور العدد 2 فإن

$$A = \{2,4,6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

أمثلة

رميت قطعة نقود متزنة ٣ مرات ، إذا علم أن الوجه في الرمية الأولى H ، فما احتمال أن يكون الوجهان الأخران H , H ؟

فضاء العينة في هذه التجربة هو :
S = { HHH , HHT , HTH , THH , TTT , THT , TTH , HTT}
A الحادث= H الوجه الأول ={ HHH, HHT, HTH, HTT}
B الحادث = H , H الوجهان الأخران= { HHH, THH }
$A \cap B$ = { HHH}

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

من قانون الاحتمال الشرطي نستنتج

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

التوزيع الطبيعي
Normal Distributions

٣٤

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

- يعتبر التوزيع الطبيعي من اشهر وأهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة ، حيث تتعدد تطبيقاته في الحياة ، كما أن كثير من التوزيعات الاحتمالية اشتقت من التوزيع الطبيعي.
- اذا تم أخذ قياسات معين لخلايا أو أعدادها أو نباتات أو أشخاص أو حتى قياس سرعة تفاعل حيوي (عبر جهاز spectrophotometer) ، وتم وضع هذه القياسات المتباينة في جداول تكرارية ومن ثم تمثيلها بالمدرج التكراري Histogram ، ستظهر البيانات كما في الشكل التالي

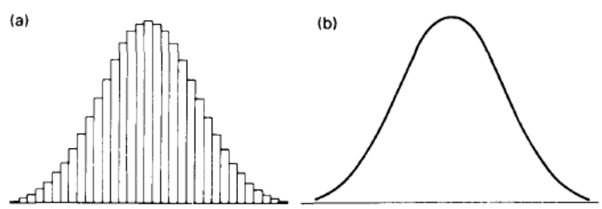


Fig. Gradation of a histogram (a) into the normal curve (b)

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

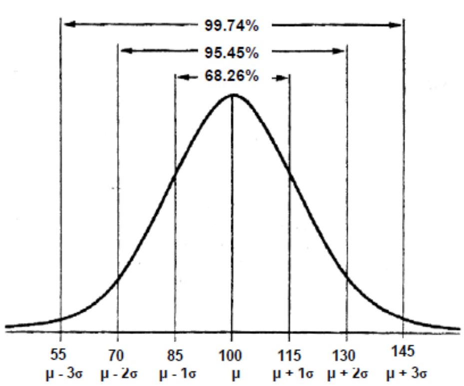
- كلما كان عدد المشاهدات n المستخدمة في المدرج التكراري تؤول الى ما لانهاية ، سيكون عرض الفترات يؤول الى الصفر وبالتالي اذا رسم منحنى على المدرج التكراري سيأخذ شكل الجرس ولا وجود لفجوات عبر هذا المنحنى.
- هذا الشكل من البيانات يقال عنه أنه موزع طبيعياً ، حيث أن معظم القياسات قريبة من الوسط ، وتبتعد القيم القليلة عن الوسط.

خصائص التوزيع الطبيعي

- المنحنى يأخذ شكل الجرس **bell-shaped curve**
- متماثل حول الوسط الحسابي μ mean ، يقع منوال واحد فقط عند $x = \mu$
- في المنحنى الطبيعي توجد قمة واحدة حيث تتساوى قيمة كل من الوسط الحسابي مع الوسيط مع المنوال
- يتقارب طرفا منحنى الطبيعي من الصفر عندما X تؤول الى ما لا نهاية ∞ في الاتجاه الموجب أو السالب.
- المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي 1 ، ونظرًا للتماثل حول الوسط فإن المساحة على يمين الوسط تساوي المساحة على يسار الوسط.

Normal Distribution التوزيع الطبيعي

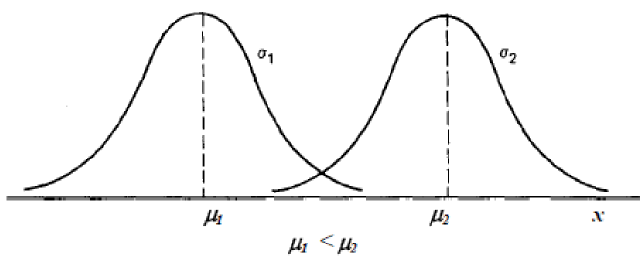
- هناك نسب معينة من المساحة الواقعة ضمن أي عدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط كما في الشكل
- 68.26% ضمن $\mu \pm 1\sigma$
- 95.45% ضمن $\mu \pm 2\sigma$
- 99.74% ضمن $\mu \pm 3\sigma$



التوزيع الطبيعي Normal Distribution

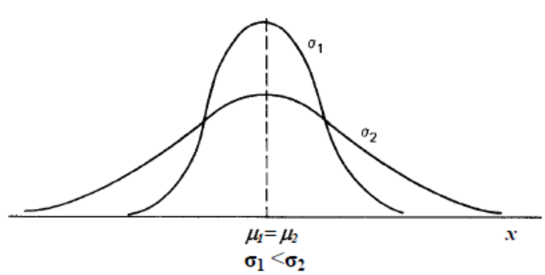
- يعتمد التوزيع الطبيعي على قيم الوسط μ Mean ، والتباين.

من الممكن أن يكون المنحنيان طبيعيان و لهما نفس الانحراف المعياري ، لكن الوسط مختلف.



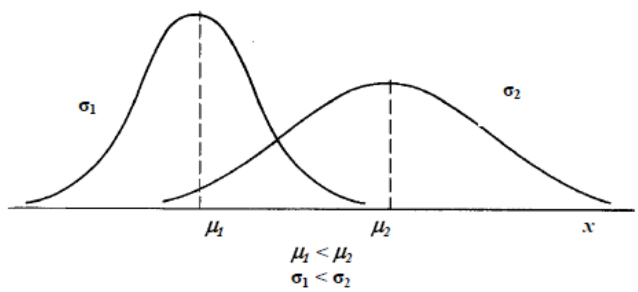
التوزيع الطبيعي Normal Distribution

أو لهما نفس الوسط لكن الانحراف المعياري يختلف .



التوزيع الطبيعي Normal Distribution

- أو يختلفان في الوسط والانحراف المعياري.



Thank You
Best Wishes

٤٢